Université d'Orléans

ECOLE SUPERIEURE DE L'ENERGIE ET DES MATERIAUX

CONCOURS 1988 - Option Spéciales MM', PP', TT', TA

MATHEMATIQUES (Durée 4 h - Coefficient 4)

Chaque candidat doit traiter deux problèmes :

- *le problème A et le problème B pour les candidats des options M, M', P, P', T' ;*
- *le problème A et le problème C pour les candidats des options T, TA.*

Il est demandé aux candidats de faire figurer très lisiblement sur leurs copies la lettre du problème traité et de respecter l'ordre des questions à l'intérieur de chaque problème.

La clarté et la précision des réponses ainsi que le soin apporté à la présentation des résultats seront des éléments importants d'appréciation.

PROBLEME A

(Toutes options)

Dans toute la suite $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients réels, pour $n \geq 1$.

Soit (a,b) un couple de nombres réels, $(a,b) \neq (0,0)$.

I. Pour $c \in \mathbb{R}$ on considère l'équation différentielle homogène :

$$(E_c) : (ax + b)\, y'(x) - c\, y(x) = 0 \quad .$$

1) Résoudre cette équation puis déterminer, suivant les valeurs de $c \in \mathbb{R}$, toutes les solutions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$. Déterminer les valeurs de $c \in \mathbb{R}$ pour lesquelles (E_c) admet pour solutions des fonctions polynômiales sur $\mathbb{R}$.

2) En supposant $a \neq 0$, résoudre l'équation différentielle

$$(ax + b)\, y'(x) - c\, y(x) = \frac{|ax + b|^{c/a}\ (ax + b)}{(1 + x^2)^2}$$

II. Soit $\Phi_{a,b}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, par $\Phi_{a,b}(P) = (aX + b)P' + aP$.

1) Déterminer $\operatorname{Ker} \Phi_{a,b}$ (ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tels que $\Phi_{a,0}(P) = 0$) et le rang de $\Phi_{a,b}$.

2) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de $\Phi_{a,b}$. Pour quelles valeurs de (a,b) l'endomorphisme $\Phi_{a,b}$ est-il diagonalisable ?

3) Déterminer la matrice $M = (m_{ij})_{1 \leq i,\, j \leq n+1}$ de $\Phi_{a,b}$ dans la base canonique $B = (1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

4) Donner, quand $\Phi_{a,b}$ est diagonalisable, les matrices de passage de la base canonique vers une base de vecteurs propres et de cette base de vecteurs propres vers la base canonique (on pourra utiliser, à une certaine étape, l'identité : $X = X + a - a$).

5) On suppose $n \geq 4$.
En utilisant (4) calculer $m_{2,n}$ et vérifier que l'on a l'égalité

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k}\, k\, (k+1)\, C_n^k = 0$$

PROBLEME B

(Options M, M', P, P', T')

I. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit :

$$u_n = \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin(x^2)\, dx \quad \text{et} \quad v_n = \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} |\sin(x^2)|\, dx$$

1) Etudier la convergence des séries $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$

Que peut-on conclure à partir de l'étude de la série $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ sur la convergence ou divergence de $\int_0^{\infty} |\sin(x^2)|\, dx$?

Tournez la page S.V.P.

2) On considère les séries entières réelles $\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} v_n x^n$

Déterminer leurs rayons de convergence et faire l'étude au bord de leurs intervalles de convergence.

II.1) Montrer la convergence des intégrales de Fresnel :

$$\int_0^{\infty} \sin(x^2)\,dx \quad \text{et} \quad \int_0^{\infty} \cos(x^2)\,dx.$$

Dans toute la suite on notera $I_1 = \int_0^{\infty} \sin(x^2)\,dx$ et $I_2 = \int_0^{\infty} \cos(x^2)\,dx$.

2) Pour $A \in \mathbb{R}_+^*$ soit D_A le carré de $\mathbb{R}^2$

$$D_A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ 0 \leq x \leq A \quad \text{et} \quad 0 \leq y \leq A\}$$

Calculer en fonction de I_1 et I_2 la limite, quand A tend vers $+\infty$, de l'intégrale double sur le domaine D_A

$$\iint_{D_A} \sin(x^2 + y^2)\,dx\,dy .$$

Soit $D_{1,A}$ le domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$D_{1,A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ 0 \leq x \leq A \text{ et } 0 \leq y \leq A \text{ et } x^2 + y^2 \leq A\}$$

La limite, quand A tend vers $+\infty$, de l'intégrale double

$$\iint_{D_{1,A}} \sin(x^2 + y^2)\,dx\,dy \quad \text{existe-t-elle ?}$$

3) On se propose de calculer les valeurs de I_1 et I_2

a) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs réelles.

i/ Montrer à l'aide d'un exemple simple que $\lim_{T \to +\infty} \int_0^A f(xT)\,dx$ peut exister sans que pour autant $\int_0^A (\lim_{T \to +\infty} f(xT))\,dx$ ait un sens.

ii/ On suppose que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ où $\ell \in \mathbb{R}$.

Déterminer $\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x)\,dx$.

Déduire en fonction de I_1 et I_2 la valeur de

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(\iint_{D_A} \sin(x^2 + y^2)\,dx\,dy \right) dA .$$

b) Considérons le domaine $D_{2,A}$ de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$D_{2,A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ 0 \leq x \leq A \quad \text{et} \quad x - y \geqslant 0\}$$

Montrer, en utilisant le changement de variables en coordonnées polaires, que

$$\iint_{D_{2,A}} \sin(x^2 + y^2)\,dx\,dy = \frac{\pi}{8} + I_A$$

où I_A est une intégrale sur un intervalle de $\mathbb{R}$, que l'on ne cherchera pas à calculer.

En échangeant l'ordre d'intégration dans l'intégrale double $\int_0^T I_A\,dA$ (Théorème de Fubini) déterminer

$\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T I_A\,dA$ puis calculer

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(\iint_{D_{2,A}} \sin(x^2+y^2)\,dx\,dy \right) dA.$$

Déterminer une relation entre

$$\iint_{D_A} \sin(x^2+y^2)\,dx\,dy \text{ et } \iint_{D_{2,A}} \sin(x^2 + y^2)\,dx\,dy$$

En déduire la valeur de

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(\iint_{D_A} \sin(x^2 + y^2)\,dx\,dy \right) dA.$$

c) En utilisant les résultats trouvés en a) et b) déduire une relation entre I_1 et I_2.

TSVP

d) Calculer $\lim_{A \to +\infty} \iint_{D_A} \cos(x^2 + y^2)\, dx\, dy$ en fonction de I_1 et I_2

e) En utilisant le changement de variables en coordonnées polaires montrer que $\iint_{D_{2,A}} \cos(x^2 + y^2)\, dx\, dy = J_A$ où J_A est une intégrale, sur un intervalle de $\mathbb{R}$, que l'on ne cherchera pas à calculer.

Déterminer $\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T J_A\, dA$ puis en déduire

$\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(\iint_{D_A} \cos(x^2 + y^2)\, dx\, dy \right) dA$

f) En utilisant les résultats trouvés en d) et e) déduire une relation entre I_1 et I_2

g) A-t-on $I_1 = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ où la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ a été définie en I.1.? Que peut-on déduire quant au signe de I_1 ?

h) Déterminer les valeurs de I_1 et I_2 .

PROBLEME C

(Options T, TA)

Soit $\mathcal{E}$ l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On note (Ox), (Oy), (Oz) les axes associés, M(x,y,z) le point de $\mathcal{E}$ tel que $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + y\vec{k}$ et $\|\vec{V}\| = (a^2 + b^2 + c^2)^{\frac{1}{2}}$ la norme d'un vecteur $\vec{V} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$.

Enfin, (H) désigne la surface de $\mathcal{E}$ d'équation : $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

1. Soit P (1,0,0). Montrer qu'il existe exactement deux droites passant par P et incluses dans (H).

2. Pour $x_0 \geq 2$, soit M_0 $(x_0, 0, 0)$.

   i) Déterminer l'ensemble des points M $\in$ (H) pour lesquels $\|\overrightarrow{MM_0}\|$ est minimum et calculer la valeur de ce minimum.

   ii) Déterminer les normales à (H) passant par M_0.

   iii) Soit (h) la courbe plane intersection de (H) avec le plan (xOz). Déterminer le point de (h) où le rayon de courbure est minimum.

3. Soient $x_0 \geq 2$ et $\lambda > \sqrt{(\frac{x_0}{2})^2 - 1}$. On note (C_λ) l'ensemble - non vide - des points M de (H) à distance λ de M_0 $(x_0, 0, 0)$, c'est-à-dire tels que $\|\overrightarrow{MM_0}\| = \lambda$. On étudie dans cette question les courbes ainsi tracées sur (H).

   i) Montrer que (C_λ) est tracée sur un cylindre de révolution d'axe parallèle à (Oz).

   Dans tout ce qui suit, on suppose $x_0 = 4$ et $\lambda = 3$.
   On note alors (C) au lieu de (C_3) la courbe obtenue.

   ii) Paramétrer (C) et étudier ses projections sur les plans de coordonnées.

   iii) Quelle est l'aire du domaine borné délimité par la projection orthogonale de (C) sur le plan (yOz) ?

   iv) Calculer l'aire du domaine plan

   $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x = 2, \quad y^2 \leq 1, 0 \leq z, x^2 + y^2 - z^2 \geq 1\}$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail